

This question paper contains 8+4 printed pages]

3141-Arts

B.A. (Third Year) EXAMINATION, 2018

MATHEMATICS

Paper I

(Real Analysis)

Time allowed : Three Hours

Maximum Marks : 70

Part A (खण्ड 'अ') [Marks : 20]

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part B (खण्ड 'ब') [Marks : 30]

Answer five questions (250 words each),

selecting one question from each Unit.

All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

P.T.O.

Part C (खण्ड 'स')

[Marks : 20]

Answer any two questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part A (खण्ड 'अ')

Unit I (इकाई I)

1. (i) Define derived set.

व्युत्पन्न समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

- (ii) State Bolzano-Weierstrass Theorem.

बोल्ज़ानो-वाइएस्ट्रास प्रमेय का प्रकथन लिखिए।

Unit II (इकाई II)

- (iii) Discuss the convergence of the geometric series.

गुणोत्तर श्रेणी के अभिसरण की विवेचना कीजिए।

- (iv) Write the statement of Cauchy's n^{th} root test.

कोशी का n वाँ मूल परीक्षण का कथन लिखिए।

Unit III (इकाई III)

(v) State the Darboux Theorem.

डारबू प्रमेय का कथन लिखिए।

(vi) Write down the necessary and sufficient condition for R-integrability.

रीमान समाकलनीयता के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए।

Unit IV (इकाई IV)

(vii) Find the Fourier coefficient a_0 in the cosine series of $\sin x$ in the interval $0 < x < \pi$.

$\sin x$ की $0 < x < \pi$ अंतराल में कोज्या श्रेणी में फुरिये गुणांक a_0 का मान ज्ञात कीजिए।

(viii) Find the Fourier coefficient a_0 in the Fourier series for the function :

$$f(x) = x^2; -\pi < x < \pi.$$

फलन

$$f(x) = x^2; -\pi < x < \pi$$

के लिए फुरिये श्रेणी में फुरिये गुणांक a_0 का मान ज्ञात कीजिए।

Unit V (इकाई V)

- (iv) Test the convergence or divergence of the integral :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-x}$$

निम्न समाकल के अभिसरण अथवा अपसरण के परीक्षण कीजिये :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-x}$$

- (v) Test the convergence or divergence of the integral :

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx$$

निम्न समाकल के अभिसरण अथवा अपसरण के परीक्षण कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx$$

Part B (खण्ड 'ब')

Unit I (इकाई I)

2. Prove that the set of rational numbers, \mathbb{Q} , is an Archimedean ordered field.

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का सम्पूर्ण अर्किमिडीय क्रमित क्षेत्र है।

3. Prove that no open interval (a, b) is compact.

सिद्ध कीजिए कि कोई विवृत अंतराल संकृत नहीं है।

Unit II (इकाई II)

4. Prove that the sequence :

$$X_n = \frac{2n-7}{3n+2}; \forall n \in \mathbb{N}$$

is convergent.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम

$$X_n = \frac{2n-7}{3n+2}; \forall n \in \mathbb{N}$$

अभिसारी है।

5. If $x > 0$, then test the convergence of the following series :

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}x^n + \dots$$

यदि $x > 0$ हो तो निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}x^n + \dots$$

Unit III (इकाई III)

6. If

$$f(x) = x \in [0, 1],$$

then show that f is R-integrable on $[0, 1]$ and

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

यदि फलन

$$f(x) = x \in [0, 1],$$

तब सिद्ध कीजिए कि f अन्तराल $[0, 1]$ पर R-समाकलनीय

है तथा $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$ ।

7. Let f is a function defined on the interval $[0, 1]$ such that :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

then show that f is not R-integrable on $[0, 1]$.

यदि फलन f अंतराल $[0, 1]$ पर निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$f(x) = 0$ यदि x परिमेय हो एवं $f(x) = 1$ यदि x अपरिमेय हो;

तो सिद्ध कीजिए कि f अंतराल $[0, 1]$ पर R-समाकलनीय है।

Unit IV (इकाई IV)

8. Obtain the Fourier series expansion of the function :

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

निम्न फलन के लिए फुरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

9. Obtain the Fourier series expansion of the function :

$$f(x) = x \sin x ; -\pi < x < \pi$$

निम्न फलन के लिए फुरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = x \sin x ; -\pi < x < \pi$$

Unit V (इकाई V)

10. Test the convergence of

$$\int_a^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{b^2 x^2 + c^2} dx$$

निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\int_a^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{b^2 x^2 + c^2} dx$$

11. Test the convergence of

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$$

निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$$

Part C (खण्ड 'स')

Unit I (इकाई I)

12. (a) Find the g.l.b. and l.u.b. of the set :

$$S = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 25\}.$$

समुच्चय

$$S = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 25\}$$

का उच्चक एवं निम्नक ज्ञात कीजिए।

- (b) Prove that cantor set is uncountable.

सिद्ध कीजिए कि कैंटर समुच्चय अगणनीय है।

Unit II (इकाई II)

13. (a) Test the following series for convergence where the general terms are given as :

$$U_n = \sqrt{(n^2 + 1)} - n$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए जिसका व्यापक पद है :

$$U_n = \sqrt{(n^2 + 1)} - n$$

(b) Test the convergence of the following series :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^3}{4^4} + \frac{4^4}{5^5} + \dots$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^3}{4^4} + \frac{4^4}{5^5} + \dots$$

Unit III (इकाई III)

14. (a) Find the upper and lower Riemann integral for the function defined in $[0, 1]$ such that :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & ; \text{if } x \text{ is rational number} \\ 1-x & ; \text{if } x \text{ is irrational number} \end{cases}$$

and show that $f(x)$ is not R-integrable in $[0, 1]$.

अंतराल $[0, 1]$ में परिभाषित निम्न फलन के ऊपरी एवं निम्न रीमान-समाकल ज्ञात कीजिए और यह प्रदर्शित कीजिए कि $f(x)$ अंतराल $[0, 1]$ पर R-समाकलनीय नहीं है।

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ यदि x परिमेय हो एवं $f(x) = 1-x$ यदि x अपरिमेय हो।

(b) Every monotonic function f is R-integrable.

प्रत्येक एकदिष्ट फलन R-समाकलनीय होता है।

Unit IV (इकाई IV)

15. (a) Examine for term by term integration the series :

$$\sum x^{n-1}(1-2x^n)$$

in the interval $[0, 1]$.

श्रेणी

$$\sum x^{n-1}(1-2x^n)$$

का अन्तराल $[0, 1]$ में पदशः समाकलन के लिए परीक्षण कीजिए।

(b) Obtain the Fourier series for the function :

$$f(x) = x ; -\pi < x < \pi .$$

फलन

$$f(x) = x ; -\pi < x < \pi$$

के लिए फुरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Unit V (इकाई V)

16. (a) Test the convergence of the following integral :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

- (b) Prove that the set Q of rational numbers is countable.

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q गणनीय होता है।