Roll No. ....

(118) **4044**

Printed Pages—**7**] **2B.Sc.(IT)4**

Bachelor of Science (IT) (Second Semester) Examination, Dec. 2018/Jan. 2019

FUNDAMENTALS OF MATHEMATICS–II (Discrete Mathematics)

अवधि/Duration : 3 घंटे/Hours] [पूर्णांक/Max. Marks : 100

[न्यूनतम उत्तीर्णांक/Min. Pass Marks : 40

निर्देश :

1. प्रश्न-पत्र पाँच इकाइयों में विभाजित है । प्रत्येक इकाई में आन्तरिक विकल्प दिया गया है ।
2. प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न का उत्तर दीजिए । इस प्रकार कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
3. **सभी** प्रश्नों के लिए समान अंक नियत हैं ।
4. जहाँ आवश्यकता हो वहाँ उपयुक्त डाटा माना जा सकता है ।
5. अनुवाद में विसंगति होने पर अंग्रेजी स्वरूप को सही माना जाए ।
6. प्रश्न-पत्र में परीक्षार्थी निर्धारित स्थान पर अपना रोल नम्बर अंकित करें ।

Instructions :

1. The Question Paper is divided in five Units. Each unit carries an internal choice.
2. Attempt *one* question from each Unit. Thus attempt *five* questions in all.
3. *All* questions carry equal marks.
4. Assume suitable data wherever necessary.
5. English version should be deemed to be correct in case of any anomaly in translation.
6. Candidate should write his/her Roll Number at the prescribed space on the question paper.

P.T.O.

इकाई I (Unit I)

1. (*a*) सिद्ध कीजिए कि $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ एक टॉटोलॉजी है।

Prove that $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ is a tautology.

(*b*) प्रदर्शित कीजिए :

Show that :

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

अथवा (*Or*)

2. (*a*) यदि $\mathrm{P} \equiv$ सुनीता दयालु है, $\mathrm{Q} \equiv$ सुनीता सुंदर है, $\mathrm{R} \equiv$ लोग उसे पसंद करते हैं। तब निम्नलिखित सांकेतिक कथनों को भाषा में लिखिए :

(*i*) $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{R})$

(*ii*) $\mathrm{P} \Rightarrow (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})$.

इन कथनों की तार्किक तुल्यता का परीक्षण कीजिए।

If $\mathrm{P} \equiv$ Sunita is kind, $\mathrm{Q} \equiv$ Sunita is beautiful, $\mathrm{R} \equiv$ People like her, then translate the following symbolic statements into language :

(*i*) $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{R})$

(*ii*) $\mathrm{P} \Rightarrow (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})$.

Test the logical equivalence of these statements.

(*b*) निम्नलिखित कथनों के लिए सत्यता सारणी बनाइये :

Prepare truth table for the following statements :

(*i*) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim q$

(*ii*) $[p \wedge (\sim p)]$.

इकाई II (Unit II)

3. (*a*) सिद्ध कीजिए कि :

Prove that :

$$\sim(\forall\ x \in X)\ P(x) \equiv (\exists\ x \in X)\ [\sim P(x)].$$

(*b*) दर्शाइये :

Show that :

$(x)\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (x)\ (Q(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow (x)\ (P(x) \rightarrow R(x)).$

अथवा (*Or*)

4. (*a*) बूलीयन बीजगणित में सिद्ध कीजिए कि :

In Boolean algebra, prove that :

(*i*) $a + a = a$

(*ii*) $a \cdot a = a.$

(*b*) निम्नलिखित को संकेतों में लिखिए :

(*i*) एक आदमी का अस्तित्व है।

(*ii*) कुछ आदमी चालाक होते हैं।

(*iii*) कुछ वास्तविक संख्याएँ परिमेय हैं।

Write the following in symbols :

(*i*) There exists a man.

(*ii*) Some men are clever.

(*iii*) Some real numbers are rational.

इकाई III (Unit III)

5. (*a*) 1,000 लोगों के समूह में 750 हिंदी भाषी हैं, 400 बांग्लाभाषी हैं, तो कितने लोग सिर्फ बंगाली भाषा बोलते हैं तथा कितने लोग दोनों भाषाएँ बोल सकते हैं ?

In a group of 1,000 people, there are 750 who can speak Hindi and 400 who can speak Bengali. How many can speak Bengali only ? How many can speak both ?

(*b*) R एक बाइनरी संबंध है, एक धनात्मक पूर्णांक के समुच्चय पर इस प्रकार कि :

$$R = \{(a, b) : 2 \text{ divides } (a - b)\}.$$

क्या R एक समतुल्य संबंध है ?

Let R be a binary relation on the set of non-negative integers such that :

$$R = \{(a, b) : 2 \text{ divides } (a - b)\}.$$

Is R an equivalence relation ?

अथवा (*Or*)

6. (*a*) माना $X = \{x : x \in R$ तथा $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$ तथा $Y = \{y : y \in R$ तथा $-1 \leq y \leq 1\}$। सिद्ध कीजिए कि फलन $f : X \rightarrow Y$ जो कि $f(x) = \sin x$ है, एकैकी आच्छादक फलन है।

Let $X = \{x : x \in R \text{ and } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$ and $Y = \{y : y \in R \text{ and } -1 \leq y \leq 1\}$. Show that the mapping $f : X \rightarrow Y$ defined by $f(x) = \sin x$ is a bijective mapping.

(*b*) किसी लैटिस (L, $\vee$, $\wedge$) के लिए सिद्ध कीजिए कि :

(*i*) $a \vee b \geq a$

(*ii*) $a \geq b$ तथा $a \geq c \Rightarrow a > b \vee c$

जहाँ $a, b, c \in$ L।

For any lattice (L, $\vee$, $\wedge$) prove that :

(*i*) $a \vee b \geq a$

(*ii*) $a \geq b$ and $a \geq c \Rightarrow a > b \vee c$

where $a, b, c \in$ L.

इकाई IV (Unit IV)

7. (*a*) यदि a तथा b किसी समूह G के कोई अवयव हैं तो दर्शाइये कि $(ab)^2 = a^2b^2$ जबकि G एक अबेलियन समूह है।

Show that if a and b are arbitrary elements of a group G, then $(ab)^2 = a^2b^2$ if G is an abelian.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G के दो उपसमूह H_1 तथा H_2 का संघ, G का एक उपसमूह होगा सिर्फ और सिर्फ यदि एक दूसरे का उपसमुच्चय हो।

Prove that the union of two subgroups H_1 and H_2 of a group G will also be a subgroup of G if and only if one is a subset of other.

अथवा (*Or*)

8. (*a*) यदि R एक वलय है जिसमें कि $a^2 = a$, $\forall\ a \in R$, तो सिद्ध कीजिए :

(*i*) $a + a = 0$, $\forall\ a \in R$

(*ii*) $a + b = 0 \Rightarrow a = b \quad a, b \in R$

(*iii*) R एक commutative वलय है।

If R is a ring such that $a^2 = a$, $\forall\ a \in R$, show that :

(*i*) $a + a = 0$, $\forall\ a \in R$

(*ii*) $a + b = 0 \Rightarrow a = b \quad a, b \in R$

(*iii*) R is a commutative ring.

(*b*) यदि G पूर्णांकों का धनात्मक समूह है तथा G′ समपूर्णांकों का शून्य के साथ धनात्मक समूह है, तब प्रतिचित्रण $f : G \to G'$ जहाँ $f(x) = 2x$, $\forall\ x \in G$ एक isomorphism है।

Let G be the additive group of integers and G′ be the additive group of even integer with zero, then the mapping $f : G \to G'$ defined by $f(x) = 2x$, $\forall\ x \in G$ is an isomorphism.

इकाई V (Unit V)

9. (*a*) दर्शाइये कि समुच्चय $W = \{(p, q, 0) : p, q \in F\}$, $V_3(F)$ का उपसमष्टि है।

Show that the set $W = \{(p, q, 0) : p, q \in F\}$ is a subspace of $V_3(F)$.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि फलन $f : V_2(R) \to V_3(R)$, जहाँ $f(a, b) = (a, b, 0)$ एक रैखिक प्रतिचित्रण है। kernel ज्ञात कीजिए।

Prove that the function $f : V_2(R) \to V_3(R)$, defined by $f(a, b) = (a, b, 0)$ is a linear transformation. Find the kernel.

अथवा (*Or*)

10. (*a*) सिद्ध कीजिए कि यदि W_1 तथा W_2 किसी सदिश समष्टि V(F) की उपसमष्टि हैं तो $W_1 \cap W_2$ भी V(F) की उपसमष्टि है।

Prove that if W_1 and W_2 are subspaces of a vector space V(F), then $W_1 \cap W_2$ is also a subspace of V(F).

(*b*) दर्शाइये कि सदिश (1, 2, 1), (2, 1, 0) तथा (1, –1, 2), R^3 के आधार का निर्माण करते हैं।

Show that the vectors (1, 2, 1), (2, 1, 0) and (1, –1, 2) form a basis of R^3.